

Pronóstico de volúmenes medios anuales del lago de Chapala usando modelos autorregresivos ARMA (p, q)

Josué Elizondo-Gómez¹, Fernando Velázquez-Alvarez²,
Jesús Osornio-Ramírez³ y Alfonso Gutiérrez-López^{4*} alfonso.gutierrez@uaq.mx
* Autor de correspondencia

Centro de Investigaciones del Agua de Querétaro (CIAQ), Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro
Circuito Universitario s/n, Cerro de las Campanas, C.P. 76010
Santiago de Querétaro, Qro., México

Resumen

La demanda de agua potable, sin duda, ha aumentado en los últimos años debido al crecimiento poblacional desmedido que, en conjunto con los cambios ambientales que ha experimentado la ciudad de Guadalajara, hace más difícil garantizar el acceso al recurso. Actualmente, el diseño de una red de suministro de agua potable considera únicamente el crecimiento poblacional obtenido mediante algún modelo probabilístico, a pesar de que el crecimiento poblacional es un fenómeno estocástico, es decir, es un fenómeno aleatorio. Por lo tanto, efectuar el pronóstico de volúmenes medios anuales de agua disponible en el lago de Chapala da una idea acerca de si el recurso será suficiente para satisfacer la dotación diaria de la población, en virtud de que se han presentado grandes variaciones en los volúmenes disponibles, lo cual repercute en la calidad de vida humana. Los modelos autorregresivos ARMA (p, q) proveen un pronóstico certero que ofrece resultados, a manera de series de datos en el tiempo, que contienen un factor aleatorio con implicaciones en el azar. Si bien no es un método convencional para proyectar recursos hídricos, la naturaleza de los modelos autorregresivos garantiza mayor exactitud que un pronóstico generado probabilísticamente, ya que considera lo que puede pasar por cuestiones de azar.

Los volúmenes de agua pronosticados proveen un panorama sobre lo que se puede esperar como recurso disponible para la población, a fin de determinar si será posible satisfacer las necesidades humanas de aquellos que hacen uso de este recurso.

Palabras clave: modelo autorregresivo, volúmenes sintéticos, disponibilidad, zona conurbada, lago de Chapala

Abstract

Water demand has increased in the last years, due to the excessive population growth, which, in addition to the environmental changes that Guadalajara City has experienced, makes more difficult to guarantee the access to the resource. Currently, the design for water supply networks only considers the population growth obtained from a probabilistic model, even though the population growth is a stochastic phenomenon, this is, a random phenomenon. Therefore, the forecast of available water mean volumes of Chapala lake provides an idea on whether or not the water resource will be enough to satisfy the daily water endowment of the population, due to the fact that there have been big variations in the available water volumes, which affects the quality of human life. Autoregressive models ARMA (p, q) provide an accurate forecast that offers results, as data series over time, that contain an aleatory factor with random implications. While this is not a conventional method for water resources, the autoregressive models guarantee greater accuracy than a forecast probabilistically generated because it considers what may happen for reasons of chance.

The forecasted water volumes provide an overview of what can be expected as available resource for the usage of the population, in order to determine if it will be enough to satisfy the human needs.

Key words: autoregressive model, synthetic volume, availability, semi-urban zone, Chapala lake

Artículo arbitrado

Recibido:
30 de Agosto de 2019

Aceptado:
08 de noviembre de 2019

Introducción

De acuerdo con información provista por la Comisión Estatal de Aguas (CEA) del estado de Jalisco, México, el lago de Chapala es la principal fuente de abastecimiento de la zona conurbada de la ciudad de Guadalajara, ya que satisface aproximadamente el 60% de la demanda total en la zona; por lo tanto, la previsión de volúmenes futuros que han de ser empleados en el suministro de agua potable es crítica (Ashoori *et al*, 2014), pues se trata de una de las ciudades con mayor crecimiento del país.

Los modelos empleados por la CEA y la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA) para determinar el suministro de agua potable para una población toman en cuenta únicamente la probabilidad de crecimiento poblacional (CONAGUA, 2007). Sin embargo, también es necesaria la evaluación de la disponibilidad de las fuentes de abastecimiento.

Tomando un enfoque más técnico, es correcto afirmar que los volúmenes de agua presentes en el lago de Chapala pueden ser modelados como un fenómeno aleatorio debido a la presencia de factores hidrológicos, los cuales son eventos que pueden ser tratados como una serie estocástica con la que, a partir de observaciones y datos históricos, podemos generar pronósticos de volúmenes de agua (Mukundan *et al*, 2019). Dichos volúmenes han de ser realmente útiles para el desarrollo de investigaciones futuras, dado el hecho de que el suministro de agua potable es un tema que concierne a la sociedad en general, especialmente a sociedades en desarrollo —como ya se mencionó—, pues el avance económico y social se da, generalmente, en zonas urbanas (Shikingalah y Mapani, 2019).

Debido a sus características, la zona conurbada de la ciudad de Guadalajara encaja dentro de dicha designación; por lo tanto, predecir el comportamiento de los volúmenes que puede presentar el lago de Chapala, con base en la modelación estocástica, es fundamental para el

futuro diseño de redes de abastecimiento de agua potable. En cada diseño, de acuerdo con especificaciones de CONAGUA, se considera que la población va a crecer.

Así como se prevé que la población crezca, es necesario considerar cabalmente que el agua es un recurso finito (Valhando y Carrera, 2019). La disponibilidad del agua depende de un gran número de variables ambientales que regulan de manera natural el suministro disponible de agua potable para una población (Brandt *et al*, 2017). Al considerar las afirmaciones pasadas, anticipar la variabilidad en los volúmenes disponibles del lago es vital para no quebrantar el equilibrio ecológico que presenta el ecosistema del lago de Chapala. Tal hecho ya ha sido estudiado y evaluado por Olga E. Hart y Rolf U. Halden, quienes determinaron que, actualmente, hay una necesidad de integrar la incertidumbre en la planeación del suministro de agua a futuro, esto es, la aleatoriedad (Hart y Halden, 2019).

Habiendo sido expuesta la problemática, el objetivo del presente estudio es prever futuros volúmenes del lago de Chapala que contengan un factor aleatorio mediante modelos autorregresivos, con el fin de tener datos que sirvan como base para una planificación del suministro de agua potable en la zona conurbada de Guadalajara.

Metodología

La evolución de volúmenes del lago de Chapala muestra altibajos que denotan la variabilidad del agua disponible; por otro lado, la densidad poblacional en la zona conurbada de Guadalajara ha aumentado de acuerdo con el censo efectuado por el INEGI en el año 2010. La tabla 1 muestra la evolución poblacional para la zona de estudio en un periodo de 20 años (INEGI, 2010).

Año	Población
1990	3,043,770.00
1995	3,534,378.00
2000	3,752,597.00
2005	4,151,680.00
2010	4,498,514.00

Tabla 1. Población histórica del periodo 1990-2010 del área metropolitana de la ciudad de Guadalajara, Jalisco

Para este trabajo, se usó información provista por la CEA Jalisco de volúmenes históricos (véase figura 1), a partir de la cual se determina la dependencia o independencia de la serie de datos de volúmenes del lago de Chapala. Por lo tanto, se hace un correlograma (Kisilev *et al*, 2018); para ello, son tomados en cuenta los datos de la serie en un tiempo variable “t”, siendo que, para determinar los valores que los conforman, se debe especificar “(1)”, que corresponde a una metodología Box-Jenkins (Lu y AbouRizk, 2009).

$$(1) \rightarrow r(k) = \frac{C_k}{C_0} = \frac{\frac{1}{N-k} \sum_{t=1}^N (X_t - X)(X_{t+k} - X)}{\frac{1}{N} \sum_{t=0}^N (X_0 - X)(X_0 - X)}$$

Obtener el correlograma de la serie de volúmenes de agua en el lago de Chapala abre pauta para que los coeficientes φ del modelo autorregresivo sean obtenidos mediante (2), (3), (4), (5), (6) y (7), que

corresponden a los coeficientes de modelos autorregresivos de orden 1, 2 y 3.

$$(2) \rightarrow \varphi_1 = \frac{r_1}{r_0} = r_1$$

$$(3) \rightarrow \varphi_1 = \frac{r_1(1-r_2)}{1-r_1^2}$$

$$(4) \rightarrow \varphi_2 = \frac{r_2-r_1^2}{1-r_1^2}$$

$$(5) \rightarrow \varphi_1 = \frac{(1-r_1^2)(r_1-r_3)-(1-r_2)(r_1r_2-r_3)}{(1-r_2)(1-2r_2+r_2)}$$

$$(6) \rightarrow \varphi_2 = \frac{(1-r_2)(r_2+r_2^2-r_1^2-r_1r_3)}{(1-r_2)(1-2r_1^2+r_2)}$$

$$(7) \rightarrow \varphi_3 = \frac{(r_1^2-r_2)(r_1-r_3)-(1-r_2)(r_1r_2-r_3)}{(1-r_2)(1-2r_1^2+r_2)}$$

Obtenidos los diferentes coeficientes φ , es posible avanzar en la determinación del modelo autorregresivo de tres diferentes órdenes, con los cuales se pueden generar los parámetros del modelo (Rojas *et al*, 2008). De tales parámetros, se obtienen series sintéticas cuya naturaleza las hace contener un factor aleatorio que mejora el pronóstico (Hallin y Mélard, 1988).



Figura 1. Evolución de volúmenes de agua en hectómetros cúbicos del lago de Chapala del año 1934 a 2010.

El primer paso consiste en la normalización de los datos a través de logaritmos o Box-Cox (Bicego y Balda, 2016). Para este trabajo, se tomó un parámetro T=0 para llevar a cabo tal normalización, cuyo fin era el de transformar la serie de datos en una que contuviera las características de una distribución normal (Rigby y Stasinopoulos, 2004). El modelo autorregresivo requiere ser alimentado con datos de tales características.

La forma general del modelo autorregresivo se puede apreciar en (8) (Escalante-Sandoval y Reyes-Chávez, 2000; Taneja *et al*, 2016):

$$(8) \rightarrow z_t = \varphi_1 z_{t-1} + \dots + \varphi_n z_{t-n} + \varepsilon_t + MA$$

Por otro lado, es necesario calcular los parámetros empleados en las medias móviles, donde se sigue una metodología similar a la usada para la fracción correspondiente a la parte autorregresiva. Por practicidad, dichos parámetros no son mencionados en este trabajo.

Resultados

Se determinó que el conjunto de volúmenes históricos del lago de Chapala es una serie independiente con base en el correlograma de los datos previamente mencionados, que es obtenido al aplicar la ecuación (1) a los diferentes tiempos variables “t” que conforman la serie de datos con inicios en el año 1936.

Al tener los valores de r_n , fue posible obtener los valores de φ_n para los tres diferentes modelos planteados en la metodología, que, en conjunto con la serie de residuales, propiciaron la generación de datos sintéticos que contienen un factor aleatorio que aumenta su validez (Misra y Naqvi, 2018).

Con la aplicación de la ecuación (8), se generaron series sintéticas que comienzan en el año 2019 y

terminan en 2028. A partir de ello, se generó la figura 2, donde se observa la serie histórica de color negro, así como las series pronosticadas para los siguientes diez años. Por su parte, la figura 3 muestra un descenso del contenido de volumen de agua un tanto apreciable a partir del año 2020.

La tabla 2 muestra un conglomerado de los diferentes resultados obtenidos a partir de la modelación estocástica de volúmenes medios anuales para el lago de Chapala en un periodo de 10 años.

Año	ARMA (1,1)	ARMA (2,2)	ARMA (3,3)
2019	8742.62	5766.06	6099.87
2020	6780.30	5660.36	5634.14
2021	7431.98	5556.59	5762.79
2022	6620.71	5454.73	5604.66
2023	6758.55	5354.73	5586.51
2024	6391.76	5256.57	5501.62
2025	6375.02	5160.20	5450.12
2026	6188.83	5065.61	5383.49
2027	6135.15	4972.74	5325.22
2028	6027.64	4881.58	5263.92

Tabla 2. Volúmenes medios anuales del lago de Chapala, Jalisco, pronosticados del año 2018 a 2028.

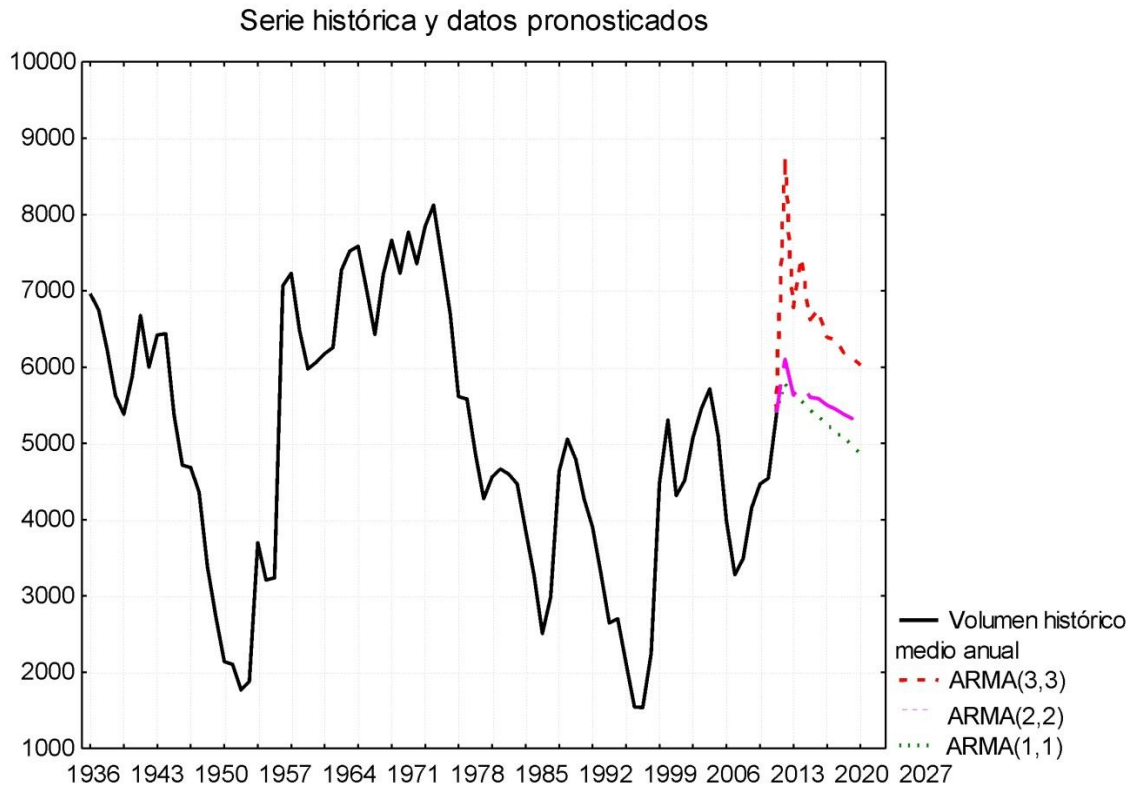


Figura 2. Datos históricos con series sintéticas correspondientes a ARMA (1,1), ARMA (2,2) y ARMA (3,3).

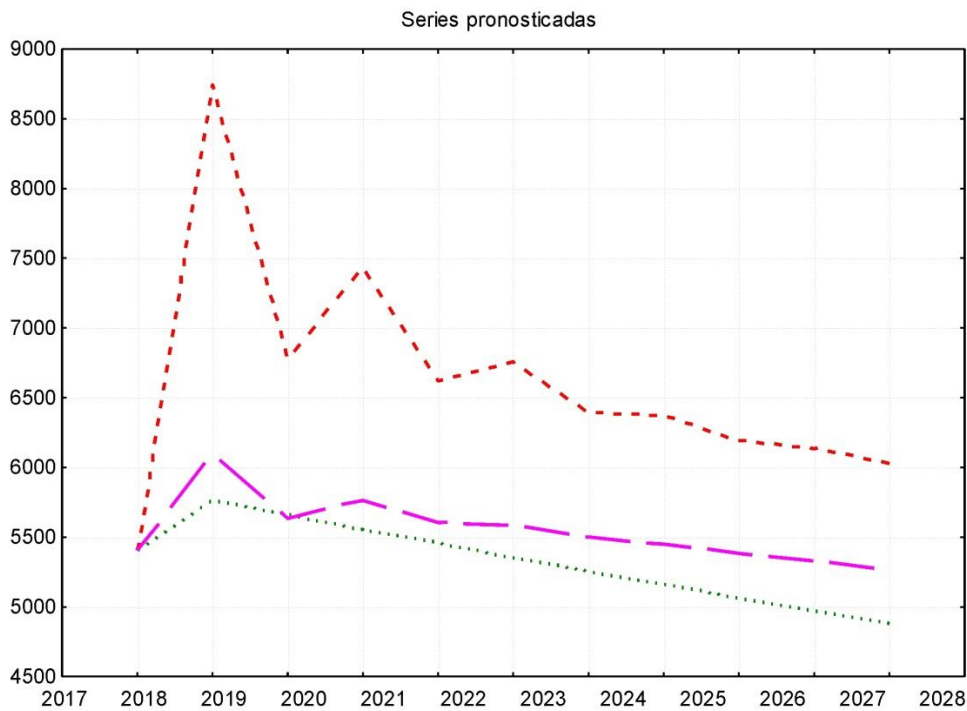


Figura 3. Pronóstico de volúmenes para el lago de Chapala, con inicio en el año 2018 y término en 2028, con los modelos ARMA (p,q) mencionados en la figura 2.

Discusión

A partir de lo expuesto previamente, es claro que los volúmenes históricos del lago de Chapala pueden ser modelados como una serie estocástica que es útil para pronosticar escenarios futuros. Si bien hay variaciones en el pronóstico, debido a los diferentes modelos autorregresivos con medias móviles empleados, todos los pronósticos concuerdan en que, en el año 2019, habrá un aumento de volumen medio anual en el lago de Chapala; asimismo se refleja que, a partir del año 2020, se estiman volúmenes menores a los pronosticados el año anterior, lo que claramente responde a las alteraciones que sufre el ciclo hidrológico; esto, a su vez, repercute en la disponibilidad de agua, es decir, en la calidad de vida humana (Rasifaghihi *et al*, 2019).

Las tres diferentes series pronosticadas proveen un amplio panorama para representar la variabilidad que puede presentar un fenómeno como el estudiado, de acuerdo con los resultados obtenidos por Langan R. (Langan *et al*, 2014). Tal investigación comparó diferentes series estocásticas, en contraste con la histórica, y demostró que es posible una amplia variabilidad en las series sintéticas; por lo tanto, los volúmenes pronosticados aportan cierto grado de confianza y concuerdan con la problemática de abastecimiento de agua que a veces sufre la población de la zona conurbada de Guadalajara, que es provista por agua proveniente del lago de Chapala (Godínez-Madrigal *et al*, 2019).

Conclusiones

A raíz de lo mostrado previamente, es posible modelar una serie histórica de volúmenes como una serie sintética, con un error bajo, que sirva como base para llevar a cabo un pronóstico a un tiempo futuro t mediante el uso de modelos autorregresivos, de tal manera que sea empleado aquel que se acople mejor a la serie temporal histórica de datos que se pretenden modelar y pronosticar. De igual manera, tener presentes tales valores es un indicador que sirve como pauta para la planificación urbana en materia de sistemas de abastecimiento de agua

potable, ya que es seguro que la población ha de crecer y, con ello, la demanda del recurso hídrico crecerá también.

Para complementar el análisis pronóstico de los volúmenes futuros en función de la serie histórica, sería recomendable considerar factores ambientales, climatológicos y poblacionales que permitan explicar los aumentos y descensos de volumen que presenta el lago en el transcurrir del tiempo.

La aplicación de modelos autorregresivos posibilita el uso de datos sintéticos para el diseño de redes de abastecimiento a la par de los estudios de crecimiento poblacional, ya que la metodología actual no considera la disponibilidad de las fuentes existentes, sino únicamente el crecimiento poblacional.

Referencias

- Ashoori N., Dzombak D.A., Small M.J. (2017). Identifying water price and population criteria for meeting future urban water demand targets, *Journal of Hydrology*. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.hydrol.2017.10.047>
- Bicego M., Balda S. (2016). Properties of the Box-Cox transformation for pattern classification. *Neurocomputing*, 218, 390-400. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2016.08.081>
- Brandt M.J., Johnson K.M., Elphinston A.J. & Ratnayaka D. (2017). Water supply regulation, protection, organization and financing. *Twort's Water Supply*, 37-63. Doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100025-0.00002-8>
- Censo Poblacional. INEGI 2010.
- Comisión Nacional del Agua. Manual de Agua Potable, Alcantarillado y Saneamiento. Coyoacán, México D.F.: s.n., 2007.
- Escalante-Sandoval C. & Reyes-Chávez L. (2002). Técnicas Estadísticas en Hidrología. UNAM, Facultad de Ingeniería.
- Godínez-Madrigal J., Van Cauwenbergh N. & Van Der Zaag P. (2019). Production of competing water knowledge in the face of water crises: revisiting the IWRM success story of the Lerma-Chapala Basin, Mexico. *Geoforum*. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.geoforum.2019.02.002>
- Hallin M. & Mélard G. (1988). Rank-Based tests for randomness against first-order serial dependence, *Journal of the American*

Statistical Association, 83:404, 1117-1128, DOI: [10.1080/01621459.1988.10478709](https://doi.org/10.1080/01621459.1988.10478709)

Hart O.E., Halden R.U. (2019). On the need to integrate uncertainty into U.S. water resource planning. *Science of the Total Environment*. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2019.07.164>

Langa R., Archibald R., Plumlee M., Mahajan S., Ricciuto D., Yang C., Mei R., Mao J., Shi X. & Fu J.S. (2014). Stochastic parameterization to represent variability and extremes in climate modelling. *Procedia Computer Science*, 29, 1146-1155. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2014.05.103>

Misra N. & Naqvi S. (2018). Stochastic comparison of residual lifetime mixture models. *Operations Research Letters*, 46(1), 122-127. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.orl.2017.11.015>

Mukundan R., Acharya N., Gelda R.K., Frei A. & Owens E.M. (2019). Modeling streamflow sensitivity to climate change in New York City water supply streams using a stochastic weather generator. *Journal of Hydrology: Regional Studies*, 21, 147-158. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejrh.2019.01.001>

Rasifaghili N., Li S.S. & Haghghat F. (2019). Forecast of urban water consumption under the impact of climate change. *Sustainable Cities and Society*, 52 (September, 2019), 101848. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.scs.2019.101848>

Rigby R.A. & Stasinopoulos D.M. (2004). Smooth centile curves for skew and kurtotic data modelled using the Box-Cox power exponential distribution. *Statistics in Medicine*, 23(19), 3053-3076. Doi: <https://doi.org/10.1002/sim.1861>

Rojas I., Valenzuela O., Rojas F., Guillen A., Herrera L.J., Pomares H., Marquez L., Pasadas M. (2008). Soft-computing techniques and ARMA model for time series prediction. *Neurocomputing*, 71 (4-6), 519-537. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2007.07.018>

Shikingalah R.N., Mapani B. (2019). Precipitation variations and shifts over time: implications on Windhoek City water supply. *Physics and Chemistry of the Earth*. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.pce.2019.03.005>

Taneja K., Ahmad S., Ahmad K. & Attri S.D. (2016). Time series analysis of aerosol optical depth over New Delhi using Box-Jenkins ARIMA modeling approach. *Atmospheric Pollution Research*, 7(4), 585-596. Doi: <https://doi.org/10.1016/j.apr.2016.02.004>

Valhondo C. & Carrera J. (2019). Water as a finite resource: from historical accomplishments to emerging challenges and artificial recharge. *Sustainable Water and Wastewater Processing*, 1-17. Doi: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-816170-8.00001-6>